“Lo vedo, ma non ci credo”

Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l’infinito attuale.[1]

Arrigo G., D’Amore B. (1999). “Lo vedo, ma non ci credo”. Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l’infinito attuale. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 22B, 5, 465-494.

Gianfranco Arrigo[2] - Bruno D’Amore[3]

Summary. *In this work we study the limits of comprehension and acceptance on the part of students in the upper secondary school, of some recent questions as to the actual use of infinity and in particular about a celebrated theorem of George Cantor. We attempted moreover an analysis of the motivation of this widespread non-acceptance, collating it in various ways.*

1. Origine storica *del titolo* della nostra ricerca.

Quando ci si avvicina alla storia della matematica, una delle questioni che colpisce di più è il contenuto di una celebre e straordinaria lettera di Georg Cantor (1845-1918) a Richard Dedekind (1831-1916), inviata da Halle il 29 giugno 1877. Visto che Dedekind ritardava (!) a dargli risposta su un quesito propostogli il 25 giugno, Cantor, dopo soli 4 giorni, e chiedendo scusa per il proprio *zelo*, ripropone appunto nella lettera del 29 giugno con forza un interrogativo, dichiarando di aver *necessità* di ricevere il giudizio di Dedekind.
Quasi all’inizio di tale nuova lettera (in tedesco), Cantor scrive (in francese) la famosa frase:

> “Fintanto che voi non mi avrete approvato, io non posso che dire: lo vedo, ma non ci credo”.[4]

---

[1] Lavoro eseguito nell'àmbito del contratto di ricerca CNR n. 97.00875.CT01 e con contributo economico del Ministero Italiano della Università e della Ricerca Scientifica e Tecnologica.

[2] Dipartimento dell’Istruzione e della Cultura, Divisione Scuola, Repubblica e Cantone del Ticino, Svizzera.

[3] N.R.D., Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia.

[4] Su questo punto si veda (Arrigo, D’Amore, 1993). Per conoscere i testi completi delle lettere scambiate tra i due formidabili matematici tedeschi, si può vedere (Noether, Cavaillès, 1937) e (Cavaillès, 1962).

Sorge spontaneo chiedersi quale fosse l'argomento sul quale così decisamente Cantor sollecitava una rapida risposta da Dedekind. Ce lo dice lo stesso Cantor nella sua lettera del 25 giugno:

> «Una varietà continua a p dimensioni, con p>1, può essere messa in relazione univoca con una varietà continua ad una dimensione, in modo tale che ad un punto dell'una corrisponda un punto ed uno solo dell'altra?».

Va detto subito che per "relazione univoca" a quei tempi si intendeva quel che oggi chiameremmo "corrispondenza biunivoca". Per favorire un eventuale lettore non esperto in matematica, ci si può ridurre al caso seguente, particolare, ma altrettanto significativo:
è possibile trovare una corrispondenza biunivoca tra i punti di un quadrato[5] ed i punti di un segmento[6]?
L'importanza della domanda è intuibile dal seguente commento dello stesso Cantor:

> "La maggior parte di coloro ai quali ho sottoposto questa domanda si sono molto stupiti per il fatto stesso che io avessi potuto sottoporla, giacché si *capisce da sé* che, per la determinazione di un punto su una estensione a p dimensioni, occorrono sempre p coordinate indipendenti".

Cantor confessa poi che lui aveva cercato di dimostrare questo fatto, ritenendolo vero, ma solo perché non si accontentava più della supposta e così diffusa *evidenza*! E confessa dunque di aver fatto *sempre* parte di chi non metteva in dubbio tale fatto; *sempre*, finché aveva dimostrato invece che le cose non stanno affatto così...
La dimostrazione trovata da Cantor è di una semplicità geniale; per essa rinviamo ad un buon testo universitario di Analisi, per esempio Bourbaki (1970), pag. 47-49. Noi qui ci ispiriamo ad una celebre volgarizzazione della dimostrazione di Cantor che si trova per esempio in Courant e Robbins (1941), pagine 149-150,[7] e relativa al solo esempio visto sopra, proposto all'ipotetico non matematico nostro lettore.[8]

□ Poniamo il quadrato su un sistema di assi cartesiano ortogonale monometrico di origine O, in modo tale che due lati consecutivi siano "appoggiati" sugli assi (ovviamente uno dei vertici coincide allora con l'origine). Considerando il lato del quadrato come unità di misura, si ha subito che ogni punto P interno alla superficie quadrata ha coordinate reali x_P ed y_P del tipo $0<x_P<1$, $0<y_P<1$, dunque, esplicitamente: $x_P = 0{,}a_1a_2...a_n...$, $y_P = 0{,}b_1b_2...b_n...$ Ad ogni *coppia*

---

5 Per "quadrato" intendiamo d'ora in poi una superficie piana a forma quadrata *aperta*, cioè senza bordo.

6 Intendiamo parlare d'ora in poi di segmento *aperto*, cioè senza estremi.

7 Ci riferiamo alle pagine della trad. it. (1971), Torino, Boringhieri.

8 In realtà, nel seguito del nostro lavoro, è solo a questo esempio che ci riferiremo.

ordinata di numeri reali (x_P ; y_P) si faccia corrispondere *il numero reale* $x_{P'}$ così definito: $x_{P'}=0,a_1b_1a_2b_2...a_nb_n...$, ottenuto preponendo 0 e la virgola, ed alternando poi le singole cifre decimali di ciascuna coordinata. Si può facilmente constatare che $0<x_{P'}<1$ e come tale $x_{P'}$ sia definito in modo univoco a partire da x_P ed y_P; e come esso si possa considerare come coordinata ascissa di un punto P', pensabile dunque come *il* corrispondente di P nella corrispondenza definita.
Viceversa: si può partire da P' e dalla sua coordinata ascissa e, con un banale metodo inverso di distribuzione delle cifre, risalire univocamente a P.
Dunque, questo teorema di Cantor è provato da noi, almeno nel caso in cui la dimensione della varietà *p* vale 2: ai punti interni del quadrato unitario corrispondono in modo biunivoco i punti interni del segmento unitario. ■¶

Poiché questa dimostrazione si basa sulla scrittura dei numeri con la virgola, è ovvio che si deve dare per scontata una *univocità* di tale scrittura, come d'altra parte obiettò lo stesso Dedekind a Cantor in una lettera successiva (pur accettando la dimostrazione ed ammettendo che la sua obiezione non la scalfiva minimamente). Si tratta dunque di eliminare per convenzione, prima dell'enunciato del teorema, l'unica ambiguità possibile, che si riscontra nel solo caso in cui appare un 9 periodico. Per esempio, è ben noto che $0{,}35\overline{9} = 0{,}36$: basta allora *vietare* le scritture del primo tipo e, qualora comparissero, sostituirle con scritture del secondo tipo.[9]

La nostra ricerca ha motivazioni puramente didattiche ed il presente paragrafo ha solo lo scopo di situarla in àmbito storico.
Abbiamo voluto ricordare quanto sopra, solo per giustificare il nostro titolo: "Lo vedo, ma non ci credo"; la frase celebre di Cantor, che rende così umana e travagliata tutta la storia di questa dimostrazione, sarà per noi emblematica di quel che potrebbe dire anche un giovane studente di scuola secondaria superiore alle prese con la dimostrazione tratta da Courant e Robbins (1941), da noi illustrata.
Tutto ciò ci porta però anche ad evidenziare, seppur brevemente, gli ostacoli che si sono avuti nello sviluppo storico di questo difficile e controverso argomento, fino alla dimostrazione di Cantor che, per quanto geniale e semplice, non fu però immediatamente accolta. Anche se non lo diremo più esplicitamente, è ovvio che quando parleremo di ostacoli epistemologici a questo riguardo, la storia stessa qui rapidamente delineata va considerata come un robusto appoggio alla loro evidenziazione.

---

9 In realtà, ci sarebbero altri dettagli da sistemare e precauzioni da prendere; ma poiché il nostro scopo qui non è quello di entrare in sottili questioni critiche su questo argomento (peraltro ben note) bensì è quello di esporre una nostra ricerca, sorvoliamo. Si può vedere Carruccio (1971).

2. Descrizione del quadro teorico di riferimento.

Per quanto riguarda la ricerca sulla problematica dell'insegnamento e dell'apprendimento dell'infinito, uno di noi ha avuto l'incarico, in occasione dell'VIII ICME (Siviglia 1996) di *Chief Organizer* del *Topic Group* XIV, il cui tema era appunto dedicato a questo aspetto. In quella occasione, egli ha redatto una bibliografia di oltre 300 titoli, aiutato dal contributo di molti ricercatori di tutto il mondo; tale bibliografia è stata scritta in italiano (D'Amore, 1997), castigliano ed inglese e sottoposta (appunto a Siviglia) ai partecipanti al TG XIV. Egli ha anche redatto un panorama ragionato di tali ricerche (D'Amore, 1996).
Partendo da questa premessa, delineiamo brevemente il quadro teorico di riferimento, nel quale intendiamo inserirci.

2.1. Tra le tante ricerche presenti sul panorama mondiale, molte si dedicano alla mancata accettazione, da parte dello studente, delle diverse cardinalità transfinite [fra i molti esempi, si vedano i lavori di Tsamir e Tirosh (1994), di Waldegg (1993), di Fischbein, Jehiam e Cohen (1994, 1995), tanto per avere una prima idea]. Per molti studenti, è *ovvio* che le cardinalità di N e Z sono uguali, dato che sono entrambi insiemi infiniti; ma allora è altrettanto ovvio che N ed R debbano avere la stessa cardinalità, per lo stesso motivo.
Questa accettazione intuitiva (che rappresenta un misconcetto assai diffuso) verrà da noi chiamata, d'ora in poi, ***appiattimento*** dei cardinali transfiniti.

2.2. Mettiamo in evidenza un'altra convinzione studiata spesso nelle ricerche; per esempio, in Tall (1980)[10] si mostra quali processi mentali e quali convinzioni intuitive portino gli studenti a ritenere che in un segmento *lungo* vi siano più punti che non in un segmento più *corto*.[11]
Questa accettazione intuitiva (che rappresenta un misconcetto assai diffuso) verrà da noi chiamata d'ora in poi: ***dipendenza*** dei cardinali transfiniti da fatti relativi a misure.

2.3. Le accettazioni intuitive (misconcetti) di *appiattimento* e di *dipendenza* sono in contraddizione tra loro; ma pare proprio che gli studenti non siano

---

[10] Ma su questo argomento la letteratura è vastissima su tutto il panorama internazionale. Si veda (D'Amore, 1996).

[11] Questa credenza di carattere *monadico* (e dunque di stampo *pitagorico*), nonostante varie ma sporadiche premesse, è stata definitivamente debellata solo nel secolo XIX, dunque piuttosto recentemente. Si veda (Arrigo, D'Amore, 1993). Essa, comunque, fa parte della mentalità comune, al di fuori del mondo matematico. Si rintraccia anche tra gli insegnanti.

interessati a rendere coerenti le loro credenze, come mostrano, in modi ed àmbiti diversi, Stavy e Berkovitz (1980), Hart (1981), Schoenfeld (1985), Tirosh (1990), Tsamir e Tirosh (1997) e D'Amore e Martini (1997, 1998).

2.4. Duval (1983) analizza la difficoltà che hanno gli studenti ad accettare la corrispondenza biunivoca cosiddetta "di Galileo" tra N ed il (suo) sottoinsieme dei numeri pari. Egli la spiega (anche) grazie ad un ostacolo che chiama di ***scivolamento***: nel suo caso si tratta dello scivolamento dal verbo Avere al verbo Essere nel corso della dimostrazione. Ma noi possiamo prendere questo fatto come prototipo e parlare di *scivolamento* più in generale, nel corso di una dimostrazione: la nostra accezione di *scivolamento* (un po' più ampia di quella di Duval) si ha quando si sta parlando di qualche cosa (o in un certo modo o nell'àmbito di un certo linguaggio) e, d'improvviso, ci si trova a parlare d'altro (o in un altro modo o in un altro linguaggio).

2.5. Il classico dibattito filosofico di provenienza aristotelica su infinito in senso *attuale* ed in senso *potenziale* (Arrigo, D'Amore, 1993) ha ispirato diverse ricerche, per esempio quelle di Moreno e Waldegg (1991), di Tsamir e Tirosh (1992), di Shama e Movshovitz Hadar (1994) e di Bagni (1998). Si sono trovati, in verità, risultati a volte contrastanti; pare però assodato che l'evoluzione della concezione *attuale* dell'infinito matematico sia più lenta ed avvenga in modo contraddittorio lungo il corso del curriculum scolastico e grazie ad un processo di maturazione e sistemazione cognitiva degli apprendimenti. Ora, la dimostrazione da noi descritta in **1.** è di stampo decisamente *attuale* per il modo stesso in cui si manipolano alcuni insiemi infiniti (i punti del quadrato e del segmento, le cifre dopo la virgola). In questo fatto potrebbe consistere uno dei punti di difficoltà di accettazione della dimostrazione stessa.

3. Descrizione dei problemi.

Siamo ora in grado di descrivere i problemi che ci hanno spinto alla presente ricerca.

P.1. Nella dimostrazione illustrata in **1.** sembrano intervenire solo fatti elementari: i primi elementi di geometria analitica, la scrittra decimale o poco più. Ciò basta a garantirne la comprensione da parte degli studenti del terzultimo e del penultimo anno di scuola superiore (età: 16-18 anni) che abbiano già acquisito quelle nozioni? Se la risposta fosse negativa, sarebbe allora come dire che le competenze preliminari dette sono necessarie, ma non sufficienti alla comprensione del teorema.

Alcune prove preliminari effettuate sporadicamente sembravano fornire risposta *negativa* a questa domanda. Ma, ovviamente, per poter dare una risposta documentata, occorreva fare la prova con criteri controllati e seguendo un apparato sperimentale solido.

P.2. Nel caso avessimo incontrato una risposta negativa, quale avrebbe potuto essere la spiegazione?
Avremmo dovuto appellarci esclusivamente agli ostacoli epistemologici, evidentemente presenti in questo campo ed esplicitamente chiamati in causa da molti degli Autori citati in precedenza [ed in special modo, per esempio, da Fischbein, Jehiam e Cohen (1994)]? Oppure avremmo scoperto, tra le cause della mancata comprensione, anche clausole generali e specifiche del contratto didattico?

P.3. E, infine, quali degli aspetti segnalati in **2.1.** - **2.5.** entrano in modo significativo nella questione?

4. Ipotesi della ricerca.

Una prima distinzione che si era subito imposta nelle prove preliminari effettuate sporadicamente è quella tra gli studenti che dichiarano di non accettare la dimostrazione e quelli che dichiarano di accettarla. La prima cosa da studiare è tentare di scoprire quali cause spingano i primi studenti al rifiuto; ma ci pare non banale o forse anche più interessante analizzare in dettaglio le risposte degli studenti che dichiarano di accettare la dimostrazione, per vedere quali siano i *veri* motivi di tale accettazione.

I.1. A nostro avviso si potrebbe scoprire che molti studenti accettano la dimostrazione a causa dell'*appiattimento*, descritto in **2.1.** o la rifiutano in base a rielaborazioni della *dipendenza* vista in **2.2.**

I.2. A nostro avviso non vi sono (o quasi) studenti in grado di rilevare la contraddizione tra l'*appiattimento* (si veda **2.1.**) e la *dipendenza* (si veda **2.2.**), confermando così i risultati già richiamati in **2.3.**

I.3. A nostro avviso c'è un punto delicatissimo nel quale si ravvisa, più o meno consapevolmente, da parte dello studente, un tipo di *scivolamento*, secondo quanto anticipato e descritto in **2.4.** Si tratta del momento in cui, nel corso della dimostrazione vista in **1.**, si passa da una questione relativa a punti, quadrato, segmento, piano cartesiano (oggetti e linguaggio della geometria), ad un'*altra* questione relativa invece a riordinamento di cifre dopo la virgola (oggetti e linguaggio dell'aritmetica) e si pretende conseguentemente di fare affermazioni di nuovo su quadrati e segmenti. Si cela qui uno *scivolamento*: si sta parlando di enti geometrici e, d'improvviso, ci si trova a parlare di cifre dopo la virgola; fatte alcune considerazioni sull'ordine delle cifre (aritmetica), si traggono conclusioni ancora a carattere geometrico. A nostro avviso, qui si cela un motivo di mancata accettazione della dimostrazione, ma per lo più inconsapevole, che verrà dunque forse denunciato in modo confuso.

I.4. A nostro avviso, trattare gli insiemi infiniti di punti e di cifre in modo *attuale* risulta normalmente al di fuori della portata cognitiva degli studenti del livello detto.

I.5. Tra gli studenti che dichiarano di accettare la dimostrazione, a nostro avviso molti lo fanno solo per una clausola di tipo generale del contratto didattico, quella che potremmo chiamare "fiducia nell'insegnante": se l'insegnante dà una dimostrazione, essa senz'altro vale e va accettata. Su questa clausola, si veda Perret-Clermont, Schubauer-Leoni e Trognon (1992).

I.6. A nostro avviso vi sarà esplicito contrasto (soprattutto fra gli studenti più intuitivi ma meno avvezzi al linguaggio formale) tra l'apparente impossibilità della tesi e la sua dimostrazione; vi saranno studenti che crederanno di aver assistito ad una sorta di *trucco*; il che potrebbe allora dare il via a considerazioni profonde sulla immagine della matematica, dell'insegnante di matematica e di sé stessi nel fare matematica, del tipo: l'insegnante può dimostrare tutto, si tratta di un trucco, o altro. Poiché la frase limitativa posta tra parentesi all'inizio di questo paragrafo **I.6.** contiene variabili non facilmente gestibili da un punto di vista sperimentale, ci limiteremo a porre questa ipotesi di ricerca più in generale, senza troppe condizioni. (Su questo, però, bisognerebbe ulteriormente indagare, per esempio per scoprire se questo eventuale atteggiamento degli studenti è legato alla dimostrazione da noi scelta, o più in generale all'infinito matematico, o ancora più in generale alla matematica).

5. Metodologia.

5.1. Popolazione scolastica sulla quale si è effettuata la prova

Si è lavorato su un campione assolutamente casuale di 16 classi di II , III e IV superiore (età variabile tra i 15 ed i 18 anni) per un totale di 287 studenti, 51 dei quali (tre classi) del Canton Ticino (Svizzera) e il resto di Bologna. Nessuno di questi allievi aveva avuto precedentemente un insegnamento di Analisi; nessuno di essi aveva mai espressamente studiato o discusso di questioni concernenti l'infinito matematico; nessuno di essi dunque aveva mai affrontato la differenza tra infinito attuale e potenziale; questi studenti non avevano svolto alcun programma specifico sui temi trattati in questa ricerca (in particolare: non avevano ripassato le nozioni che prenderemo in esame tra poco e che sono preliminari ai temi in questione). Nonostante ci siano differenze oggettive tra le due realtà geografiche (programmi diversi, popolazione scolastica più selezionata in Svizzera, modi di lavorare diversi) non si sono riscontrati comportamenti sufficientemente differenti da giustificare un'elaborazione separata dei risultati.
La prova è stata condotta dall'insegnante titolare, che ha seguito le direttive consegnategli insieme ad una videocassetta (vedi **5.2.**) e ai questionari per gli allievi (che verranno illustrati tra breve).
Una sola classe di 23 allievi ha avuto la possibilità di riesaminare i propri questionari a distanza di un anno, dopo aver seguito un regolare insegnamento di Analisi, come vedremo in **8.3.**

5.2. Contenuto del video

Per arrivare a proporre la dimostrazione detta, abbiamo proceduto per gradi. La nostra risposta è stata suddivisa in tre parti, la terza delle quali era la dimostrazione di Cantor e le due precedenti una specie di tappe intermedie (dei cui risultati abbiamo comunque approfittato per trarreindicazioni, come vedremo). Nel video, alternandosi, i due autori della presente ricerca davano le dimostrazioni delle tre affermazioni che tra poco seguiranno e delle quali le figure 1-3 costituiscono il momento culminante. Il video, della durata di 27 minuti in totale, è a disposizione di chi lo volesse esaminare.
Il video è stato suddiviso in tre parti:

1) **Segmentino - segmentone**
   Presentazione della problematica e dimostrazione del fatto che nel piano puntuale due segmenti di diversa lunghezza sono equipotenti (Figura 1).

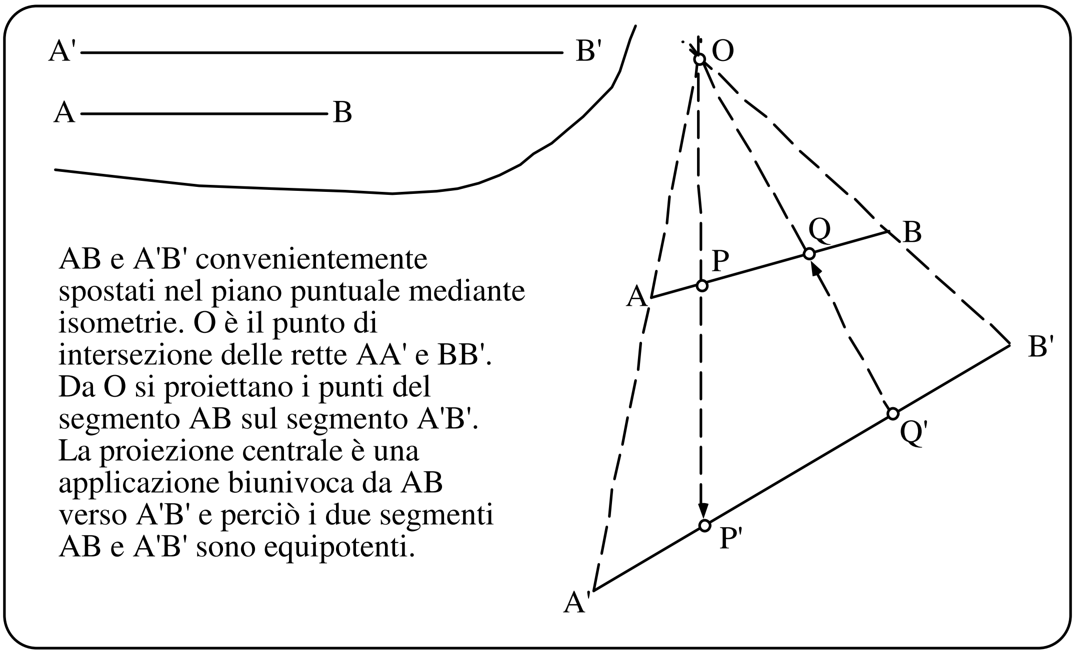


Figura 1 Illustrazione della dimostrazione contenuta nel video

2) **Forme decimali periodiche**
   Presentazione e dimostrazione del fatto che $0,3\overline{9} = 0,4$ (ved. Figura 2).
   La ricerca della frazione generatrice di un numero decimale periodico faceva parte delle conoscenze in possesso di tutti gli studenti sottoposti alla prova.

$$x = 0,3\overline{9}$$

$$\left.\begin{aligned} 100 \cdot x &= 39,\overline{9} \\ 10 \cdot x &= 3,\overline{9} \end{aligned}\right\} \quad 90 \cdot x = 36 \qquad x = 0,4$$

Figura 2 Dimostrazione del fatto che $0,3\overline{9} = 0,4$

3) **Teorema di Cantor**
Presentazione e dimostrazione del fatto che nel piano puntuale un quadrato è equipotente ad un suo lato (vedi Figura 3).
Le necessarie nozioni di geometria analitica del piano facevano parte delle conoscenze in possesso di tutti gli studenti sottoposti alla prova.

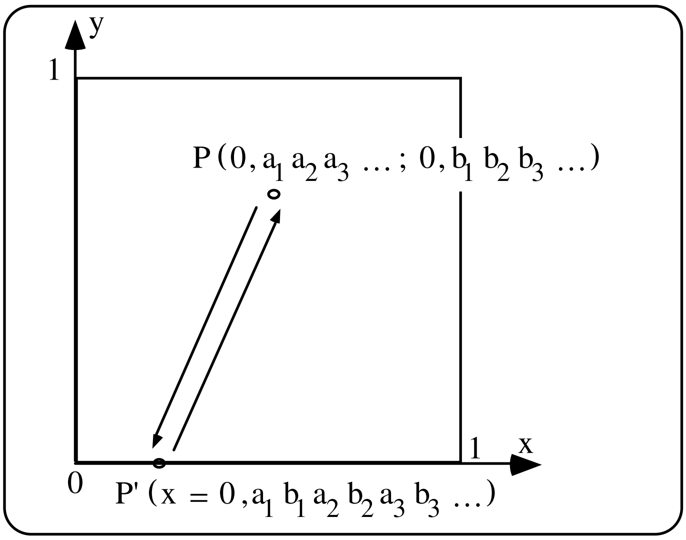


Figura 3 Dimostrazione del caso particolare citato sopra di un teorema di Cantor

5.3. Metodo di effettuazione della prova

Ogni insegnante ha mostrato il primo spezzone di video, poi ha lasciato 10-15 minuti agli studenti per rispondere per iscritto alle domande della prima parte del questionario (ved. **6.2**). Ha poi ripetuto la stessa operazione per gli altri due spezzoni, uno alla volta.
Gli allievi hanno lavorato individualmente ed in modo anonimo.

Abbiamo deciso di far ricorso ad un video per garantire la *stessa* informazione a *tutti* gli studenti coinvolti; lezioni di insegnanti diversi avrebbero potuto dare informazioni diverse da classe a classe. Il video è stato realizzato dagli autori della ricerca con l'appoggio tecnico del Centro Didattico Cantonale di Bellinzona (Svizzera). Dopo la riconsegna dei test, in molte classi si sono svolti colloqui sull'oggetto della ricerca.
Ogni classe ha dedicato in totale all'intera operazione un lasso di tempo variabile tra l'ora e l'ora e mezzo.
Come abbiamo detto, alcuni studenti hanno avuto l'occasione di rielaborare le proprie risposte dopo aver seguito un anno di insegnamento di Analisi. Questi studenti hanno riavuto i propri elaborati (riconosciuti da loro stessi) ed hanno avuto la possibilità di confermare o di modificare le risposte date la prima volta (si veda **8.3.**).

6. Risultati del test e primi commenti.

6.1. Premessa

La revisione degli elaborati e la successiva registrazione ed elaborazione logico-numerica su computer è stata effettuata interamente dagli autori della ricerca. È stato usato unicamente un foglio elettronico.
Di seguito vengono riportati i risultati più significativi. Si ricorda che il numero degli allievi sottoposti alla prova è 287.

6.2. Contenuto dei test e risposte alle domande chiuse

1. "Segmentino - segmentone"

La dimostrazione comprende due fasi. Nella prima si dispongono i due segmenti nel piano in modo tale da poter determinare un opportuno centro di proiezione. Nella seconda si effettua la proiezione dei punti di un segmento sull'altro. Agli studenti si propone la domanda seguente:
In che misura ciascuna di queste due fasi ti ha convinto?
*(Metti **una sola** crocetta per ogni fase e motiva succintamente la tua risposta).*

	per nulla	mica tanto	abbastanza	del tutto
FASE 1	**3,1%**	**6,6%**	**41,5%**	**48,8%**
FASE 2	**4,5%**	**7,3%**	**28,9%**	**57,8%**

Alcuni studenti non pongono alcuna crocetta per quanto concerne la Fase 2, il che spiega perché la somma delle percentuali sia inferiore a 100. Questo fatto capita anche in prove successive e non lo ripeteremo. Soltanto il 10-12% afferma di non essere convinto della dimostrazione. Sembrerebbe quindi che una simile argomentazione sia alla portata delle capacità di comprensione della stragrande maggioranza di questi allievi.

2. "Forme decimali periodiche"

Ti abbiamo appena mostrato che $0{,}3\overline{9} = 0{,}4$

A1. Questo fatto ti convince…
*(Metti **una sola** crocetta e motiva succintamente la tua risposta).*

per nulla	mica tanto	abbastanza	del tutto
17,4%	**28,2%**	**24,7%**	**29,6%**

A2. Le seguenti uguaglianze ti convincono?
(Metti ***una sola*** *crocetta per ogni uguaglianza).*

	per nulla	mica tanto	abbastanza	del tutto
$0,5 = \frac{1}{2}$	**3,8%**	**1,7%**	**3,1%**	**90,9%**
$0,\overline{3} = \frac{1}{3}$	**16,7%**	**17,8%**	**13,6%**	**51,2%**
$2,7\overline{9} = 2,8$	**18,5%**	**26,5%**	**25,1%**	**29,3%**
$0,\overline{9} = 1$	**17,4%**	**24,4%**	**23,0%**	**34,1%**

Queste percentuali sono per certi versi inattese, soprattutto quelle relative alle ultime tre domande. È il primo indizio di un risultato che verrà approfondito in seguito e che ci fa dire come non sempre e non tutte le conoscenze matematiche (anche qualcuna giudicata elementare) si strutturino correttamente e saldamente e di conseguenza si conservino intatte per molto tempo nelle menti degli studenti. Da questo punto di vista stupisce maggiormente il terz'ultimo risultato: la metà circa degli allievi delle superiori incontra problemi a riconoscere che $0,\overline{3}$ è **uguale** a 1/3.

3. "Teorema di Cantor"

Qual è (quali sono), secondo te, il punto cruciale (i punti cruciali) della dimostrazione che hai appena visto?
(Metti ***tutte le crocette che desideri*** *e motiva succintamente le tue risposte).*

(1) … che le coordinate dei punti del quadrato siano del tipo $(0,a_1a_2\ldots a_n\ldots;\ 0,b_1b_2\ldots b_n\ldots)$
12,9%

(2)… che da due coordinate (ascissa; ordinata) si passi a una sola (ascissa)
44,6%

(3) … che il passaggio da due coordinate a una sia stato fatto mediante una manipolazione delle cifre decimali
38,3%

(2b) rispondi SOLO se hai messo una crocetta in (2): ti ha creato particolare difficoltà il passaggio inverso, cioè da una sola coordinata a due?
6,3%

Si vede subito come il punto cruciale della dimostrazione del teorema di Cantor sia costituito dal trattamento delle coordinate, che comporta una manipolazione delle cifre decimali. È sicuramente un'operazione nuova eseguita in una situazione mai vista in precedenza dallo studente. Uno scenario estremamente instabile che farà dire a gran parte degli studenti di non aver capito bene o di sospettare che vi sia celato "un trucco" e a pochi ... coraggiosi di non accettare la dimostrazione e quindi -mediante una disinvolta applicazione del criterio logico del terzo escluso- di affermare che il teorema è falso.

6.3. Contenuto dei test e risposte alle domande aperte

Ciascuna delle tre parti del questionario si conclude con la domanda aperta:
"Come spiegheresti la dimostrazione, con tue parole, ad un allievo più giovane di te?".[12]
Una simile stimolazione si presta ovviamente a reazioni di ogni genere. Ai fini della nostra ricerca abbiamo classificato le risposte degli studenti nel modo seguente:

video	lo studente dichiara piena fiducia nella correttezza di ciò che è stato presentato nel video, senza produrre alcuna giustificazione
rico	lo studente ricostruisce completamente o parzialmente la dimostrazione vista, interpretandola personalmente, oppure dà una sua versione in parte o totalmente diversa ma, anche se non sempre, completa, corretta e indicatrice di una appropriazione della conoscenza
errato	lo studente non è convinto della pertinenza della dimostrazione e si rifugia nella sua sfera di conoscenza acquisita precedentemente, nella quale il teorema può apparire addirittura falso
no	lo studente mostra di non aver capito in generale

Inoltre, solo per le parti 1 e 3:

appiatti	"appiattimento", cioè lo studente ritiene fra loro equipotenti tutti gli insiemi infiniti e, malgrado mostri di aver capito la dimostrazione presentata, finisce per concludere adducendo questa giustificazione (ved. anche **2.1.**)
dipende	"dipendenza", cioè lo studente è convinto in partenza che il segmento più lungo contenga più punti dell'altro e, a

[12] L'inserimento di questa prova è in riferimento a D'Amore e Sandri (1996).

maggior ragione, che un quadrato contenga più punti di quanti ne contenga un suo lato; tutto ciò anche nei casi in cui egli dichiari di aver capito la dimostrazione offerta dal video (vedi anche **2.2.**).

Nel presentare i risultati distinguiamo i teoremi "geometrici" 1 e 3 da quello "aritmetico" 2 (che premettiamo), ma niente impedisce di leggere le due tavole insieme.

forme decimali periodiche	
video	10,8%
rico	35,9%
errato	19,2%
no	33,8%
appiatti	0,0%
dipende	0,0%

Il risultato più saliente è costituito a nostro avviso dal 20% quasi di studenti che credono fermamente che $0,3\overline{9} \neq 0,4$.
Il fatto interessa per due motivi:
- gli studenti conoscono già dalla scuola media questo argomento che, quindi, dovrebbe essere ben consolidato nella loro competenza cognitiva;
- molti di loro hanno ben capito il modo con cui si arriva all'uguaglianza; tuttavia, al momento di concludere, nella loro mente riaffiora l'immagine secondo la quale $0,3\overline{9}$ sarebbe solo **un'approssimazione** di 0,4.

Fra gli studenti che accettano la dimostrazione, sono molto più numerosi (77%) quelli che la ricostruiscono (più o meno) reinterpretandola.

Vediamo ora i risultati relativi ai teoremi di tipo geometrico:

segmentino-segmentone		**teorema di Cantor**	
video	15,7%	**video**	13,6%
rico	46,3%	**rico**	19,2%
errato	6,3%	**errato**	5,6%
no	20,6%	**no**	57,5%
appiatti	9,8%	**appiatti**	2,8%
dipende	1,4%	**dipende**	0,7%

Se sommiamo le percentuali delle categorie "errato", "no", "appiatti" e "dipende", otteniamo in "segmentino-segmentone" una percentuale del 38% e nel "teorema di Cantor" addirittura un 66,6%, che rappresentano parti consistenti di studenti che non sono riusciti a captare alcun elemento positivo

dalla visione del video. Essi, di conseguenza, o hanno dichiarato di non aver capito nemmeno il senso di ciò che è stato presentato, o sono rimasti muti, o sono caduti nell'appiattimento, oppure hanno reagito perorando la tesi opposta (qualcuno si è rifugiato nella dipendenza).
Comunque sottolineiamo che, almeno per questa categoria, la dimostrazione non è servita ad aprire nuove vie per l'apprendimento. In generale questi studenti hanno espresso **una convinzione antecedente, in parte sorretta da immagini mentali coerenti con sé stesse, ma non idonee ad affrontare la nuova situazione cognitiva**. D'altra parte, sappiamo essere complessa e rara l'accettazione del continuo passaggio tra competenza ed ignoranza nei processi di apprendimento, data la tendenza che si ha a stabilizzarsi sulle nuove competenze raggiunte, di volta in volta.

Ecco un protocollo che offre un esempio riguardante "segmentino-segmentone" nel quale lo studente ragiona sulla base di immagini mentali coerenti con sé stesse, ma non idonee per la nuova situazione (si basa cioè sulla retta vista ancora come una fitta ... collana di perle chiamati punti: "modello della collana"):
"Utilizzerei un teorema [sic!] *imparato alle scuole elementari e cioè che una linea è un insieme infinito di punti, e quindi se al primo punto di un segmento ne corrisponde un altro al primo punto dell'altro segmento; ed in conclusione all'infinitesimo punto del primo segmento ne corrisponde uno nel secondo segmento".*

Fra gli studenti che accettano la dimostrazione, in "segmentino-segmentone" riscontriamo (analogamente a quanto rilevato per le "forme periodiche") una netta maggioranza (75%) di quelli che reinterpretano la dimostrazione rispetto a coloro che la accettano senza darne giustificazione. Per contro, nel "teorema di Cantor" le percentuali di queste due categorie sono molto vicine al 50%: è un altro indice della notevole difficoltà di questa dimostrazione.

7. Discussione dei risultati descritti in 6. e verifica delle ipotesi formulate in 4.

7.1. Introduzione

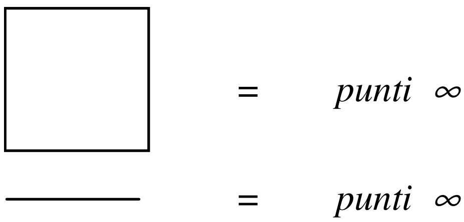
Le percentuali di allievi che non hanno capito le dimostrazioni (somma delle categorie "errato", "no", "appiatti", "dipende") sono dunque le seguenti:

segmentino-segmentone	forme periodiche	teorema di Cantor
38,0%	53,0%	66,6%

Esse rispondono in modo eloquente al problema **P.1.** (ved. **3.**) dando ragione alle nostre perplessità iniziali che ponevano in forte dubbio la comprensione della dimostrazione del teorema di Cantor da parte degli studenti pre-universitari anche se in possesso delle nozioni preliminari che risultano essere dunque necessarie ma non sufficienti. Non solo, ma, aggiungiamo, i risultati mostrano che anche le altre due dimostrazioni (ben più elementari) creano gravi problemi di comprensione.
Matura in noi sempre più la convinzione che gli ostacoli che impediscono questo tipo di comprensione non siano tanto di natura didattica bensì di **natura epistemologica.**
Da questo punto di vista, i fenomeni (contraddittori) dell'appiattimento e della dipendenza (molto meno frequente nel nostro campione) sarebbero solo delle manifestazioni visibili di tali ostacoli.

Ecco un protocollo che costituisce un chiaro ed esplicito esempio di appiattimento (esso è stato redatto dopo la dimostrazione del teorema di Cantor):

Un'area è formata da infiniti punti;
un segmento è formato da infiniti punti;
un'area contiene gli stessi punti di un segmento



7.2. L'ostacolo epistemologico in "segmentino-segmentone"

Chi rifiuta la dimostrazione lo fa principalmente perché vede ancora il segmento secondo il modello "collana". È evidente che una simile concezione porta alla convinzione che la cardinalità delle perle-punti dipenda dalla lunghezza del sostegno-segmento: cioè lo studente immagina che valga l'implicazione: maggior lunghezza $\rightarrow$ cardinalità dei punti maggiore. L'ostacolo epistemologico [inteso nel senso classico alla Bachelard (1938) e Brousseau (1983)] è una conoscenza stabile ed evidente che funziona bene in àmbiti precedenti, che costituisce un modello forte ma che crea problemi ed errori al momento in cui si cerca di adattarlo a nuove conoscenze, a situazioni nuove. Per poter parlare di "ostacoli epistemologici" occorre poi avere nella storia delle

manifestazioni analoghe a quelle verificatesi presso gli studenti: in questo caso, esse non mancano di certo!
Per superare l'ostacolo occorrono nuove conoscenze. In questo caso riteniamo si possano ricercare nel concetto di densità (che ha a che fare con l'infinito attuale: il segmento puntuale è denso perché tra due suoi punti diversi scelti arbitrariamente ce ne sono infiniti altri). È difficile immaginare che uno studente non iniziato all'insegnamento dell'Analisi possa avere un'immagine della topologia dei punti della retta (quindi almeno della loro densità) che gli permetta di capire perfettamente questo fatto. D'altra parte, questo punto della ricerca semplicemente conferma, con esempi diversi, i risultati di Romero y Chesa e Azcarate Gimenez (1994).

Ma allora, come mai il 62% dichiara di accettare il teorema e dichiara di aver capito la dimostrazione?
Quegli studenti, che costituiscono il 15,7%, che dichiarano completa fiducia nell'insegnante (-video) possono essere tutti allievi influenzati da quella norma di fiducia del contratto didattico già ricordata poco sopra.
Rimane però il 46,3% costituito da studenti che ricostruiscono la dimostrazione e che alla fine dichiarano l'evidenza del teorema. Possiamo allora concludere che questi soggetti abbiano già interiorizzato il concetto di insieme denso?
Può darsi, ma c'è almeno un'altra spiegazione.
La dimostrazione si avvale dell'immagine del **punto come intersezione di due rette**, che ha due notevoli vantaggi didattici:
- è **ben fondata** nella mente dell'allievo (grazie alla lunga esperienza fatta con la geometria)
- **contiene già almeno embrionalmente il concetto di densità** (il raggio proiettante può addirittura essere visto dinamicamente ruotare attorno al centro di proiezione e i punti di intersezione con i due segmenti percorrere interamente i segmenti stessi).

Secondo questa interpretazione, l'ostacolo epistemologico detto potrebbe essere stato almeno in parte superato.

7.3. L'ostacolo epistemologico in "forme periodiche"

Chi rifiuta la dimostrazione lo fa perché non riesce ancora a capire il significato esatto di **forma decimale periodica** di un numero razionale. I numeri periodici nascono in un contesto linguistico di infinito potenziale. Quando essi vengono introdotti nella scuola media l'insegnante solitamente avverte: «Potrei continuare la divisione e otterrei sempre lo stesso resto, quindi al quoziente dovrei riportare sempre la stessa cifra…». Da qui nasce certo l'idea di quell' "avvicinarsi sempre più al risultato senza mai raggiungerlo" descritto da più allievi. Per moltissimi studenti $0,\overline{9} = 0,999\ldots$ è *quasi* uguale a 1, ma non

esattamente uguale a 1, perché "per arrivare a 1 manca sempre qualche cosa". Dunque, più che di ostacolo epistemologico in questo caso sembra necessario parlare di ostacolo didattico.
Ecco un protocollo che costituisce un esempio significativo in tal senso (lo studente risponde alla domanda: come spiegheresti che $0,\overline{9}=1$ a un allievo più giovane di te?):

"Mi aggancerei alla realtà: se misuriamo indirettamente un oggetto, o uno spazio, possiamo ricavare un numero periodico. Ma un numero periodico è un numero infinito e visto che nella realtà non esistono oggetti infiniti, allora non esiste il numero periodico. E per vederlo, o si fa una misurazione diretta, o si prende il numero finito più vicino a quello periodico. Il numero più vicino a 0,999999... è 1".

Probabilmente solo l'acquisizione di concetti come densità ed infinito attuale permettono di poter cogliere le infinite cifre decimali come un tutto unico e giungere alla padronanza dei numeri periodici.
Eppure, nelle nostre prove, ben il 47% degli studenti dichiara di aver compreso. Come mai un risultato così apparentemente alto? Probabilmente la dimostrazione offre la possibilità di aggirare l'ostacolo didattico. L'operazione $9,\overline{9}-0,\overline{9}=9$ permette di giungere formalmente al risultato senza dover pensare alle infinite cifre dopo la virgola. Naturalmente occorre accettare di estendere le proprietà di calcolo proprie dei decimali finiti a queste nuove forme: ma di fronte a simili estensioni di solito gli studenti non si fanno eccessivi problemi (*nessuno* dei nostri 287 studenti ha di fatto contestato l'operazione).
L'ostacolo epistemologico viene quindi aggirato nella dimostrazione grazie ad un opportuno stratagemma. Anche qui, però, se lo studente si interroga su ciò che ha trovato, può ricadere nell'ostacolo, rifiutare la tesi e rifugiarsi nell'approssimazione. ("Lo vedo, ma non ci credo").
Ecco un protocollo che costituisce un esempio di questo comportamento (lo studente risponde alla domanda: come spiegheresti che $0,\overline{9}=1$ a un allievo più giovane di te?):

"Dicendogli che la differenza è così piccola che 0,999... e 1 sono quasi uguali".

7.4. Gli ostacoli epistemologici in "teorema di Cantor"

Qui le cose si fanno decisamente complesse. Intanto diciamo subito che la stessa tesi entra in conflitto con i modelli suggeriti da una supposta "evidenza", proprio quella citata da Cantor nelle sue lettere, e da egli stesso messa appunto

in discussione. Si tratta dell'equipotenza tra due infiniti attuali di diversa natura geometrica: l'uno, il quadrato, bidimensionale, l'altro, un suo lato, unidimensionale.
La dimostrazione, invece di aiutare come nei due casi precedenti, aggiunge addirittura almeno due altre difficoltà:
- il passaggio dalla situazione geometrica iniziale alla sua algebrizzazione attraverso il metodo della geometria analitica (vedi "scivolamento") ed il conseguente ritorno all'interpretazione geometrico-topologica; tale scivolamento è denunciato da molti studenti con dei chiari ed evidenti interventi del tipo: "Ma che c'entra?"
- la manipolazione delle cifre decimali, decisamente inconsueta e giudicata da molti studenti "non matematica", "non permessa", "non corretta", "inspiegabile", …

Questo spiega perché soltanto il 19,2% (categoria "rico") riesce ad avvicinarsi alla costruzione della conoscenza in oggetto. Un quinto degli studenti dunque fornisce risultati di accettazione positiva, come risulta dal complesso di questa stessa verifica.

Dunque, se consideriamo che il 66,6% di studenti (somma delle categorie "errato", "no", "appiatti", "dipende") non ha ricavato da questa dimostrazione elementi positivi per l'apprendimento, dobbiamo concludere che in questo caso **si sono superate di gran lunga le normali capacità di apprendimento degli studenti delle superiori.**
La causa di ciò sta certo nei due motivi detti sopra: scivolamento e manipolazione delle cifre decimali.

L'ostacolo epistemologico, in questo caso, sembra legato alle dimensioni diverse degli elementi che si stanno confrontando e forse alla nozione comune euclidea «Il tutto è maggiore della parte» che in questo caso è evidentissima e che sembra avere un'accettazione ed un radicamento ancora maggiori che nel caso "segmentino-segmentone". D'altra parte, la stessa storia ci dice che questa era la convinzione dei matematici della fine del XIX sec. e dello stesso Cantor.

In questo contesto, può essere interessante vedere in che misura agisce il contratto didattico, secondo il quale ciò che è stato presentato dall'insegnante è da considerarsi corretto, anche se non si è capito del tutto il discorso. La tabella seguente risponde a questa curiosità.

teorema di Cantor				
non ho capito un passaggio ma credo nella dimostrazione	non ho capito due passaggi ma credo nella dimostrazione	non ho capito tre passaggi ma credo nella dimostrazione	non ho capito alcun passaggio ma credo nella dimostrazione	ho capito la dimostrazione, ma contesto la tesi
%	%	%	%	%
18,8%	6,6%	0,3%	0,0%	3,8%

Consideriamo significative le prime due percentuali (18,8% e 6,6%): una parte tutt'altro che trascurabile di studenti dichiara di accettare la dimostrazione anche se non ha capito uno o due passaggi! D'altra parte è da notare però che nessuno studente è disposto ad accettare un teorema della cui dimostrazione non ha capito alcun passaggio. L'ultima percentuale rappresenta la parte di studenti odierni solidale con il comportamento assunto da Cantor nel giugno del 1877: "Lo vedo, ma non ci credo". Si tratta di casi che confermano quella che Waldegg (1993) chiama "resistenza all'intuizione".

8. Risposte alle domande formulate in 3.

8.1. Prime conclusioni

La dimostrazione del teorema di Cantor si è rivelata al di sopra delle normali capacità di apprendimento degli studenti delle scuole superiori che non hanno ancora seguito un insegnamento dell'Analisi. Ciò è dovuto soprattutto ad ostacoli di **natura epistemologica e didattica**, come abbiamo evidenziato, ed a due passaggi nella dimostrazione (scivolamento e manipolazione delle cifre). Il successo ottenuto dal 19,2% rientra nei valori normali della fascia di alto rendimento di una popolazione scolastica e quindi non appare significativo per la nostra ricerca.
Le dimostrazioni degli altri due teoremi ("segmentino-segmentone" e "forme periodiche") sono risultate più accessibili, ma hanno pure esse evidenziato l'esistenza di ostacoli di varia natura.

L'esame degli elaborati ci ha portato ad intuire che l'ostacolo potrebbe essere superato in almeno due modi:

- **mediante aggiramento** (ved. le dimostrazioni di "segmentino-segmentone" e di "forme periodiche"); l'operazione può riuscire anche pienamente, **ma non ha effetto duraturo**. Alla fase "lo vedo", cioè alla comprensione tecnica della dimostrazione, può seguire una reazione del tipo "ma non ci credo" causata dal **ritorno in superficie degli ostacoli**.

- **mediante rimozione e superamento** degli stessi.

8.2. Descrizione dell'ostacolo ed ipotesi per la sua rimozione

Per superare un ostacolo epistemologico occorre far varcare allo studente il confine delle sue conoscenze, aumentandole in modo diretto ed opportuno.
Per esempio, nel caso di "segmentino-segmentone" occorre aiutare lo studente a staccarsi dal modello del segmento come "collana" le cui "perle" sono strettamente ordinate. Occorre fargli prendere coscienza, per esempio, del fatto che, in un segmento, non ha più senso pensare al punto precedente né a quello successivo di un dato punto, cercando immagini opportune.

Una prova a sostegno delle nostre tesi è costituita dalla seguente indagine. Abbiamo potuto riproporre a 23 studenti del nostro campione i loro elaborati, effettuati un anno prima. Nel frattempo questa classe aveva seguito un anno di insegnamento di Analisi. Gli studenti erano liberi di confermare o di modificare le risposte che essi stessi avevano dato l'anno precedente. I risultati della rielaborazione sono presentati nel prossimo paragrafo.

8.3. Rielaborazione delle risposte da parte di alcuni studenti che nel frattempo avevano seguito un anno di insegnamento dell'Analisi

Su 69 casi possibili (23 studenti in tre situazioni diverse) si sono avuti 15 casi (22%) di cambiamento radicale di opinione **in meglio** (cioè: sono passati a una ricostruzione corretta e convinta della dimostrazione) e 3 casi (4%) **in peggio** (cioè hanno rifiutato la tesi).
In particolare: 8 allievi su 23 (35%) si sono ricreduti sulle "forme decimali", 7 dei quali producendo la dimostrazione basata sulla serie geometrica, che ritengono (a ragione) la sola rigorosa. L'ottavo studente… fa storia a sé e lo riteniamo significativo per la nostra riflessione; ecco il protocollo prodotto:

" *a* $0,\overline{9}$ *manca un pezzettino per arrivare a 1*
pezzettino = 0,000……………1
alla fine dell'infinito
fine dell'infinito?!?!
$\Rightarrow 0,\overline{9} = 1$ "

La forma espressiva è evidentemente ingenua, ma il protocollo dà ampia testimonianza della rielaborazione critica creata in base alla nuova conoscenza. Secondo noi, il precedente breve scritto prova come possa avvenire il passaggio al di là del confine delle proprie conoscenze.

2 allievi hanno risposto di aver capito *ora* (cioè dopo l'anno di Analisi) la dimostrazione del teorema di Cantor, ma entrambi affermano di non crederci (uno di essi dichiara la stessa cosa a proposito delle forme decimali).

Questi ultimi casi li consideriamo troppo isolati per essere significativi. Ne ricaviamo comunque l'impressione che certi dubbi possano permanere anche dopo anni di insegnamento dell'Analisi, soprattutto se quest'ultimo è basato maggiormente sull'acquisizione di nozioni e tecniche (come spesso purtroppo avviene) che non sulla riflessione su ciò che si va facendo e sulla costruzione consapevole della conoscenza.

Si dovrebbe considerare la presente ricerca come una prima parte, preliminare ad una successiva più "esplorativa" per quanto concerne le convinzioni degli studenti, le loro reazioni, le loro giustificazioni, le loro spiegazioni, sull'accettazione o meno degli infiniti attuale e potenziale e delle situazioni apparentemente paradossali con le quali ci si può scontrare durante lo studio dell'infinito.

Ringraziamenti

Per la conduzione delle prove descritte in **5.**, abbiamo usufruito dell'aiuto di molti colleghi di scuola secondaria superiore, i quali molto si sono prodigati, con scrupolo. Li ringraziamo esplicitamente per la collaborazione: Gabriella Bolognini (Itc, Bologna), Maurizio Casali (Ist. Prof., Bologna), Filippo Di Venti (Scuola Superiore di Commercio, Bellinzona), Aldo Frapolli (Liceo cantonale, Bellinzona), Elisa Menozzi (Itis, San Lazzaro di Savena), Fabrizio Monari (Ist. Prof., Monghidoro), Leda Nerini (Itis, Budrio), Giovanna Paganini (Liceo Scientifico, Imola), Patrizia Ricci (Itis, Budrio), Anna Maria Rossini (Liceo Scientifico, Casalecchio), Mara Tullini (Itis, Budrio); grazie anche alla classe IVB2 (Liceo Cantonale, Lugano 2). Molti altri insegnanti hanno effettuato la prova in classe per fornirci spunti preliminari, alla ricerca degli elementi e dei parametri della metodologia di conduzione ed analisi, ma tali prove non sono state ovviamente conteggiate in questo lavoro.
Per la realizzazione del video, ringraziamo Silvio Moro (Centro Didattico Cantonale, Bellinzona).

Bibliografia

ARRIGO G., D'AMORE B. (1993), *Infiniti*. Milano, Angeli.

BAGNI G.T. (1998), L'infinitesimo attuale e potenziale nelle concezioni degli studenti prima e dopo lo studio dell'Analisi, *L'educazione matematica*, in corso di stampa.

BOURBAKI N. (1970), *Éléments de Mathématiques - Théorie des ensembles - E III*. Paris, Hermann.

CARRUCCIO E. (1971), *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*. Bologna, Pitagora.

CAVAILLÈS J. (1962), *Philosophie mathématique*. Paris, Hermann.

COURANT R., ROBBINS H. (1941), *What is mathematics?* New York, Oxford Univ. Press.

D'AMORE B. (1996), L'infinito: storia di conflitti, di sorprese, di dubbi, *La Matematica e la sua didattica*, 3, 322-335. In spagnolo: *Epsilon*, 36, 341-360.

D'AMORE B. (1997), Bibliografia *in progress* sul tema: "L'infinito in didattica della matematica", *La matematica e la sua didattica*, 3, 289-305.

D'AMORE B., MARTINI B. (1997), Contratto didattico, modelli mentali e modelli intuitivi nella risoluzione di problemi scolastici standard, *La matematica e la sua didattica*, 2, 150-175.

D'AMORE B., MARTINI B. (1998), Il "contesto naturale". Influenza della lingua naturale nelle risposte a test di matematica, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, in corso di stampa.

D'AMORE B., SANDRI P. (1996), "Fa' finta di essere... ". Indagine sull'uso della lingua comune in contesto matematico nella scuola media, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 19A, 3, 223-246.

DUVAL R. (1983), L'obstacle de dedoublement des objects mathématiques, *Educational Studies in Mathematics*, 14, 385-414.

FISCHBEIN E., JEHIAM R., COHEN D. (1994), The irrational numbers and the corresponding epistemological obstacles, Proceedings of the XVIII PME*,* 2, Lisboa, 352-359.

FISCHBEIN E., JEHIAM R., COHEN D. (1995), The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers, *Educational Studies in Mathematics*, 29, 29-44.

HART K. (ed.) (1981), *Children's understanding of mathematics*, 11-16. London, Murray.

MORENO L. E., WALDEGG G. (1991), The conceptual evolution of actual mathematical infinity, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 211-231.

NOETHER E., CAVAILLÈS J. (eds.) (1937), *Briefwechsel Cantor-Dedekind*.

PERRET-CLERMONT A.-N., SCHUBAUER-LEONI M.L., TROGNON A. (1992), L'extorsion des réponses en situation asymmetrique, *Verbum*, 1/2, 3-32.

ROMERO y CHESA C., AZCARATE GIMENEZ C. (1994), An inquiry into the concept images of the continuum. Tryng a research tool, Proceedings of the XVIII PME, Lisboa, 185-192.

SCHOENFELD A. H. (1985), *Mathematical problem solving*. New York, Academic Press.

SHAMA G., MOVSHOVITZ HADAR N. (1994), Is infinity a wholer number?, Proceedings of the XVIII PME, 2, Lisboa, 265-272.

STAVY R., BERKOVITZ B. (1980), Cognitive conflict as a basic for teaching qualitative aspects of the concept of temperature, *Science Education*, 28, 305-313.

TALL D. (1980), The notion of infinity measuring number and its relevance in the intuition of infinity, *Educational Studies in Mathematics*, 11, 271-284.

TIROSH D. (1990), Inconsistencies in students' mathematical constructs, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12, 111-129.

TSAMIR P., TIROSH D. (1992), Students' awareness of inconsistent ideas about actual infinity, Proceedings of the XVI PME, Durham NH, 90-97.

TSAMIR P., TIROSH D. (1994), Comparing infinite sets: intuition and representation, Proceedings of the XVIII PME, 2, Lisboa, 345-352.

TSAMIR P., TIROSH D. (1997), Metacognizione e coerenza: il caso dell'infinito, *La matematica e la sua didattica*, 2, 122-131.

WALDEGG G. (1993), La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance à l'instruction, *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 5, 19-36.